A new class of multivariate skew distributions.

1) Elliptical distribution.

فرض کنید Ω یک ماتریس p.d با رتبه k باشد و $\underset{\sim}{\theta} \in \mathbb{R}^k$ باشد. تصادفی k بعدی $\underline{x}$ را در نظر می‌گیریم که دارای تابع چگالی به فرم زیر است.

$$f(\underline{x} \mid \underset{\sim}{\theta}, \Omega ; g^{(k)}) = |\Omega|^{-1/2} g^{(k)} \{ (\underline{x} - \underset{\sim}{\theta})' \Omega^{-1} (\underline{x} - \underset{\sim}{\theta}) \} , \quad x \in \mathbb{R}^k$$

به طوری که $g^{(k)}(u) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تابعی است که تعریف می‌شود به صورت:

$$g^{(k)}(u) = \frac{\Gamma(k/2)}{\pi^{k/2}} \times \frac{g(u;k)}{\int_0^{+\infty} r^{k/2-1} g(r;k)\,dr} .$$

به طوری که به تابع $g(u;k) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ تعریف می‌شود و $\int_0^{+\infty} r^{\frac{k}{2}-1} g(r;k)\,dr$ وجود دارد.

تابع $g^{(k)}$ اغلب هسته‌ی چگالی از بردار تصادفی $\underline{x}$ نامیده می‌شود. تابع $g(u;k)$، هسته از $\underline{x}$ را فراهم می‌کند. و دیگر عبارت‌ها در $g^{(k)}$ ثابت نرمال کننده برای تابع چگالی f را تشکیل می‌دهند و ممکن است تابع g، از این رو تابع $g^{(k)}$ به پارامترهای دیگر نیز وابسته باشد. تابع چگالی f که در بالا تعریف شد نشان دهنده یک گروه وسیعی از توزیع‌ها که توزیع‌های همگان elliptical (بیضوی) نامیده می‌شوند و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\underline{x} \sim EL(\underset{\sim}{\theta}, \Omega ; g^{(k)})$$

و فرض می‌کنیم که $F(\underline{x} \mid \underset{\sim}{\theta}, \Omega ; g^{(k)})$ تابع توزیع تجمعی از $\underline{x}$ که $\underline{x} \sim EL(\underset{\sim}{\theta}, \Omega ; g^{(k)})$ نشان دهد.

Example: let $g(u;k) = \exp(-u/2)$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u/2} u^{k/2-1}\, du = \Gamma(\tfrac{k}{2})\, 2^{k/2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})\, 2^{k/2}} u^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}\, du}_{u \sim Gamma(k/2,\, 2) \;\to 1} = \Gamma(\tfrac{k}{2})\, 2^{k/2}$$

$$g^{k}(u) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\pi^{k/2}} \times \frac{e^{-u/2}}{\int_0^{+\infty} r^{k/2-1} e^{-r/2}\, dr} = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\pi^{k/2}} \times \frac{e^{-u/2}}{\Gamma(\frac{k}{2})\, 2^{k/2}}$$

$$= \frac{e^{-u/2}}{(\pi 2)^{k/2}}$$

$$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x} \mid \theta, \Omega; g^{(k)}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} |\Omega|^{-1/2} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})\Omega^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})\right\} \quad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x} \sim N_k(\underset{\sim}{\theta}, \Omega)$$

Example: let $g(u: k, v) = \left(1 + \frac{u}{v}\right)^{-\frac{v+k}{2}}, \quad v > 0$

g به پارامتر اضافی v بستگی دارد که درجه آزادی توزیع t است.

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{u}{v}\right)^{-\frac{v+k}{2}} u^{\frac{k}{2}-1}\, du = \frac{\Gamma(\frac{v+k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\, v^{k/2}}$$

$$g^{(k)}(u; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})(\pi v)^{k/2}}\, g(u; k, v)$$

$$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\theta}, \Omega, g^{(k)}) = \frac{\Gamma(\frac{v+k}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\, (v\pi)^{k/2}} |\Omega|^{-1/2} \left\{1 + \frac{(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})'\Omega^{-1}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{\theta})}{v}\right\}^{-\frac{v+k}{2}}, \quad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x} \sim t_{k,v}(\underset{\sim}{x} \mid \underset{\sim}{\theta}, \Omega)$$

2. skew elliptical distribution

فرض می‌کنیم ε و Z بردارهای تصادفی m-بعدی باشند و فرض می‌کنیم μ بردار m-بعدی و Σ ماتریس p.d. $m\times m$ باشد و فرض کنید که:

$$X = \begin{pmatrix}\varepsilon\\ Z\end{pmatrix} \sim EL\left(\theta=\begin{pmatrix}\mu\\ 0\end{pmatrix}, \Omega=\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}; g^{(2m)}\right).$$

مطرح می‌کنیم یک کلاس از توزیع‌های چوله elliptical با استفاده از تبدیل زیر:

$$Y = DZ + \varepsilon \qquad \text{s.t.} \quad D = diag(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$$

فرض کنید $\delta' = (\delta_1, \dots, \delta_m)$. و توسعه می‌دهیم کلاس را با در نظر گرفتن متغیر تصادفی $Y|Z>0$ ، که $Z>0$ یعنی $Z_i>0$ برای $i=1,\dots,m$. اگر $\delta=0$ ، پس ما توزیع elliptical متقارن را بدست می‌آوریم و برای مقادیر مثبت δ ، توزیع چوله به راست و برای مقادیر منفی δ ، توزیع چوله به چپ را داریم. توزیع شرطی را در قضیه زیر بدست می‌آوریم.

قضیه: فرض کنید $y_1 = y - \mu$ باشد. پس تابع چگالی $Y|Z>0$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$f(y|\mu,\Sigma,D;g^{(m)}) = 2^m f_Y(y|\mu,\Sigma+D^2;g^{(m)})\, P(V>0)$$

که

$$V \sim EL\left(D(\Sigma+D^2)^{-1}y_1,\ I - D(\Sigma+D^2)^{-1}D;\ g^{(m)}_{q(y_1)}\right)$$

و

$$g_a^{(m)}(u) = \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \cdot \frac{g(a+u;2m)}{\int_0^{+\infty} r^{m/2-1} g(a+r;2m)\,dr}, \quad a>0$$

و

$$q(y_1) = y_1'(\Sigma+D^2)^{-1}y_1$$

در نتیجه می‌نویسیم که $\underline{Y} \sim SE(\underline{\mu}, \Sigma, D; g^{(m)})$. در حالت کلی، پیدا کردن تابع توزیع تجمعی در چگالی $\underline{Y}$ مشکل است برای همین در ادامه با روش‌های کاربردی MCMC کار خواهیم کرد.

در حالت یک بعدی داریم که: $m=1$ و $\Sigma = \sigma^2$ ، $D = \delta$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$f(y \mid \mu, \sigma^2, \delta; g_a^{(1)}) = \frac{2}{\sqrt{\sigma^2+\delta^2}}\, g^{(1)}\left(\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2+\delta^2}\right) F\left(\frac{\delta}{\sigma}\frac{y-\mu}{\sqrt{\sigma^2+\delta^2}} \,\Big|\, 0,1; g_a^{(1)}\right), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$g_a^{(1)}(u) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad \& \quad a = (y-\mu)^2/(\sigma^2+\delta^2)$$

Example: $g(u:m) = \exp(-u/2)$

$$\Rightarrow g^{(m)}(u) = (2\pi)^{-m/2}\exp(-u/2)$$

و $g^{(m)}_{q(\underline{y}_0)}$ از $q(\underline{y}_0)$ مستقل است و تابع چگالی توزیع نرمال چوله به فرم زیر است:

$$f(\underline{y} \mid \underline{\mu}, \Sigma, D) = 2^m |\Sigma + D^2|^{-1/2}\, \phi_m\{(\Sigma + D^2)^{-1/2}(\underline{y}-\underline{\mu})\}\, P(\underline{V} > 0)$$

$$\underline{V} \sim N_m\left(D(\Sigma + D^2)^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu}),\; I - D(\Sigma + D^2)^{-1}D\right)$$

$$E(\underline{Y}) = \underline{\mu} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\underset{\sim}{\delta} \quad \& \quad cov(\underline{Y}) = \Sigma + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)D^2$$

Example: let

$$g(u;2m,v)=\left(1+\frac{u}{v}\right)^{-\frac{v+2m}{2}}$$

قبلاً $g_a^{(m)}(u)$ را بدست آوردیم:

$$g_a^{(m)}(u)=\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\{\pi(v+m)\}^{-m/2}\left(\frac{v+m}{v+a}\right)^{m}\left(1+\frac{u}{v+m}\,\frac{v+m}{v+a}\right)^{-\frac{v+2m}{2}}$$

درنتیجه تابع چگالی شرطی $\underline{z}$ به $\underline{z}$ دارای توزیع:

$$t_{m,v+m}\left[z \mid D(\Sigma+D^2)^{-1}y_a,\ \frac{v+q(y_a)}{v+m}\{I-D(\Sigma+D^2)^{-1}D\}\right]$$

درنتیجه $\underline{y}$ دارای:

$$f(\underline{y}\mid\underline{\mu},\Sigma,D,v)=2^m\, t_{m,v}(\underline{y}\mid\underline{\mu},\Sigma+D^2)\,P(\underline{V}>0)$$

s.t. $\underline{V}\sim t_{m,v+m}$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{Y}\sim ST_v(\mu,\Sigma,D)$$

3) روش های MCMC

پیدا کردن توزیع های چوله از قضیه مشکل است برای همین از روش سلسله مراتبی برای توزیع های چوله استفاده می کنیم.

با ذکر دو مثال پیش می رویم:

Example 1: $\underset{\sim}{Y} \sim SN(\mu, \Sigma, D) \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y}|\underline{z} \sim N_m(\underline{\mu} + D\underline{z}, \Sigma) \\ \underline{z} \sim TN_m(\underline{0}, I_m)\, I_{(0,+\infty)} \end{cases}$

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \int_{\mathbb{R}^{m+}} N_m(\underline{y}|\underline{\mu} + D\underline{z}, \Sigma)\, TN_m(\underline{0}, I_m)\, d\underline{z}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{m+}} (2\pi)^{-m/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2} \underbrace{(\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z}))' \Sigma^{-1} (\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z}))}_{(\underline{y}-\underline{\mu})'\Sigma^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu}) - 2\underline{z}'D\Sigma^{-1} \quad + \underline{z}'D\Sigma^{-1}D\underline{z}}\}$$

$$* \frac{2^m}{(2\pi)^{m/2}} \exp\{-\tfrac{1}{2} \underline{z}'\underline{z}\}\, d\underline{z}$$

$$= \left(\frac{2}{2\pi}\right)^m |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu})\}$$

$$* \int_{\mathbb{R}^{m+}} \exp\{-\tfrac{1}{2}(\underline{z}' \underbrace{(D\Sigma^{-1}D + I)}_{A} \underline{z} - 2\underline{z}' \underbrace{D\Sigma^{-1}(\underline{y} - \underline{\mu})}_{B})\}\, d\underline{z}$$

$$= \left(\frac{2}{2\pi}\right)^m |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\tfrac{1}{2} (\underline{y} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu})\}$$

$$* |(D'\Sigma^{-1}D + I)^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} \exp\{-\tfrac{1}{2}((\underline{y} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} D (D'\Sigma^{-1}D + I)^{-1} D' \Sigma^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu}))\}$$

$$* \int_{\mathbb{R}^{m+}} N(\underline{z} | A^{-1}B, A^{-1})\, d\underline{z}$$

*) $E(\underset{\sim}{Y}) = E(E(\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{Z})) = E(\mu + D\underset{\sim}{Z}) = \mu + D\,E(\underset{\sim}{Z})$

$$E(\underset{\sim}{Z}) = \int_{\mathbb{R}^{m+}} \underset{\sim}{Z} \cdot \frac{2^m}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{z}'\underset{\sim}{z}\right\} d\underset{\sim}{z}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2/\pi} \\ \vdots \\ \sqrt{2/\pi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E(\underset{\sim}{Y}) = \mu + D\begin{pmatrix} \sqrt{2/\pi} \\ \vdots \\ \sqrt{2/\pi} \end{pmatrix} = \mu + \underset{\sim}{\delta}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$var(\underset{\sim}{Y}) = var(E(\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{Z})) + E(var(\underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{Z}))$$

$$= var(\mu + D\underset{\sim}{Z}) + E(\Sigma) = \Sigma + D\,var(\underset{\sim}{Z})\,D'$$

$$= \Sigma + \left(1-\frac{2}{\pi}\right) D\,I\,D = \Sigma + \left(1-\frac{2}{\pi}\right) D^2$$

$$var(\underset{\sim}{Z}) = E(\underset{\sim}{Z}\underset{\sim}{Z}') - E(\underset{\sim}{Z}')E(\underset{\sim}{Z}) = \left(1-\frac{2}{\pi}\right) I$$

برآورد پارامترها؟

$$\underset{\sim}{Y} \sim SN_m(\mu, \Sigma, D) \Rightarrow \begin{cases} \underset{\sim}{Y}|\underset{\sim}{Z} \sim N_m(\mu + D\underset{\sim}{Z}, \Sigma) \\ \underset{\sim}{Z} \sim TN_m(\underset{\sim}{0}, I)\, I_{(0,+\infty)} \end{cases}$$

$$f(\underset{\sim}{Z}) = \begin{cases} \dfrac{2^m}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{z}'\underset{\sim}{z}\right\} & \underset{\sim}{z} \in (0,+\infty) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

توزیع های پیشین

$$\begin{cases} \mu \sim N_m(\mu_0, \Sigma_0) \\ \Sigma \sim IW(\tau^{1\times 1}, \Lambda^{m\times m}) \\ \underset{\sim}{\delta} \sim N_m(\underset{\sim}{0}, B) \end{cases}$$

$D = diag(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$

$\underset{\sim}{\delta}' = (\delta_1, \dots, \delta_m)$

$$\pi(\underline{\mu}, \Sigma, D, \underline{z} \mid \underline{y}) \propto f(\underline{y} \mid \underline{z}, \underbrace{\underline{\mu}, \Sigma, D}_{\underline{\theta}})\, \pi(\underline{z} \mid \underline{\theta})\, \pi(\underline{\theta})$$

$\underline{z}$ مستقل از پارامترهای Σ، μ، D است.

$$\propto f(\underline{y} \mid \underline{z}, \underline{\mu}, \Sigma, D)\, \pi(\underline{z})\, \pi(\underline{\theta})$$

$$\propto |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z}))' \Sigma (\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z}))\right]\right\}$$

$$* \exp\left\{-\frac{1}{2} \underline{z}'\underline{z}\right\} * \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(\underline{\mu} - \underline{\mu}_0)' \Sigma_0^{-1} (\underline{\mu} - \underline{\mu}_0)\right]\right\}$$

$$* |\Sigma|^{-\frac{\tau+m+1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr(\Lambda \Sigma^{-1})\right\}$$

$$* \exp\left\{-1/2\ \underline{\delta}' B^{-1} \underline{\delta}\right\}$$

$$\pi(\underline{\mu} \mid \Sigma, D, \underline{z}, \underline{y}) \propto \exp\left\{-1/2\left[\underline{\mu}' \underbrace{(\Sigma^{-1} + \Sigma_0^{-1})}_{A} \underline{\mu} - 2\underline{\mu}' \underbrace{(\Sigma^{-1}(\underline{y} - D\underline{z}) + \Sigma_0^{-1}\underline{\mu}_0)}_{B}\right]\right\} \Rightarrow \underline{\mu} \mid \Sigma, D, \underline{z}, \underline{y} \sim N_m(A^{-1}B, A^{-1})$$

$$\pi(\Sigma \mid \underline{\mu}, D, \underline{z}, \underline{y}) \propto |\Sigma|^{-1/2} * |\Sigma|^{-\frac{\tau+m+1}{2}}$$

$$* \exp\left\{-\frac{1}{2} tr(\Lambda \Sigma^{-1})\right\} * \exp\left\{-1/2 \underbrace{[\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z})]'}_{\underline{w}'} \Sigma^{-1} \underbrace{[\underline{y} - (\underline{\mu} + D\underline{z})]}_{\underline{w}}\right\}$$

$$\Sigma \mid \underline{\mu}, D, \underline{z}, \underline{y} \sim IW_m(\tau + 1, \underline{w}\underline{w}' + \Lambda)$$

$$diag(z_1, \dots, z_m)\underline{\delta} = D\underline{z}$$

$$\pi(\underline{\delta} \mid \underline{\mu}, \Sigma, \underline{z}, \underline{y}) \propto \exp\left\{-1/2\left[\underline{\delta}' diag(\underline{z}) \Sigma^{-1} diag(\underline{z}) \underline{\delta} - 2\underline{\delta}' diag(\underline{z}) \Sigma^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu})\right]\right\} * \exp\left\{-1/2\ \underline{\delta}' B^{-1} \underline{\delta}\right\}$$

$$\propto \exp\left\{-1/2\left[\underline{\delta}' \underbrace{(diag(\underline{z}) \Sigma^{-1} diag(\underline{z}) + B^{-1})}_{A_0} \underline{\delta} - 2\underline{\delta}' \underbrace{diag(\underline{z}) \Sigma^{-1} (\underline{y} - \underline{\mu})}_{B_0}\right]\right\}$$

$$\pi(\underline{z} \mid \underline{\mu}, \Psi, D, \underline{Y}) \propto \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\underline{z}'\underbrace{(D'\Psi^{-1}D + I)}_{A^*}\underline{z} - 2\underline{z}'\underbrace{(D'\Psi^{-1}(\underline{y}-\underline{\mu}))}_{B^*}\right]\right\}$$

$$* I_{(0,+\infty)}$$

$$\Rightarrow \underline{z} \mid \underline{\mu}, \Psi, D, \underline{Y} \sim TN_m\left(A^{*-1}B^*; A^{*-1}\right) I_{(0,+\infty)}$$

Example 2: $\underset{\sim}{Y} \sim ST_\nu(\underline{\mu}, \Psi, D)$

سلسله مراتبی

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y} \mid \underline{z}, w \sim N_m(\underline{\mu} + D\underline{z}, \Psi/w) \\ \underline{z} \sim TN_m(\underset{\sim}{0}, I/w)\, I_{(0,w)} \\ w \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2) \end{cases}$$

برآورد پارامترها:

$\underset{\sim}{y} \sim ST_v(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma, D)$

توزیع‌ها ⇒ پیشین

$$\begin{cases} \underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{z} \sim N_m(\underset{\sim}{\mu} + D\underset{\sim}{z}, \Sigma / w) \\ \underset{\sim}{z} \sim TN_m(0, I)\, I(\underset{\sim}{z} > 0) \\ \underset{\sim}{\mu} \sim N_m(\underset{\sim}{\mu}_0, \Sigma_0) \\ \Sigma \sim IW(\tau, \Lambda^{m \times m}) \\ \underset{\sim}{\delta} \sim N_m(\underset{\sim}{0}, B) \\ w \sim Gamma(v/2, v/2) \\ v \sim TGamma(1, 0.1)\, I(v > 2) \Rightarrow f(v) = (0.1)\, e^{0.2 - 0.1v} \quad v > 2 \end{cases}$$

$$\pi(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma, \underset{\sim}{\delta}, w, v \mid \underset{\sim}{y}) \propto f(\underset{\sim}{y} \mid \underbrace{\underset{\sim}{\mu}, \Sigma, w, \underset{\sim}{\delta}, v}_{\underset{\sim}{\theta}}, \underset{\sim}{z})\, \pi(\underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{z})$$

$$\propto f(\underset{\sim}{y} \mid \underset{\sim}{\theta}, \underset{\sim}{z})\, \pi(\underset{\sim}{\theta})\, \pi(\underset{\sim}{z})$$

$$\propto |\Sigma|^{-1/2} w^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{y} - (\underset{\sim}{\mu} + D\underset{\sim}{z}))' \left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1} (\underset{\sim}{y} - (\underset{\sim}{\mu} + D\underset{\sim}{z}))\right\}$$

$$* I_{(0,+\infty)} \exp\left\{\frac{-1}{2} \underset{\sim}{z}' \underset{\sim}{z}\right\} * \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\mu} - \underset{\sim}{\mu}_0)' \Sigma_0^{-1} (\underset{\sim}{\mu} - \underset{\sim}{\mu}_0)\right\}$$

$$* |\Sigma|^{-\frac{\tau + m + 1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} tr(\Lambda \Sigma^{-1})\right\}$$

$$* \exp\left\{-\frac{1}{2} \underset{\sim}{\delta}' B^{-1} \underset{\sim}{\delta}\right\}$$

$$* w^{\frac{v}{2} - 1} \exp\left\{-\frac{v}{2} w\right\}$$

$$* \exp\{-0.2v\}\, I(v > 2)$$

$$\pi(\underset{\sim}{\mu} \mid \Sigma, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\underset{\sim}{\mu}'\underbrace{\left(\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1} + \Sigma_0^{-1}\right)}_{A}\underset{\sim}{\mu}\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\underset{\sim}{\mu}'\underbrace{\left(\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1}(\underset{\sim}{y} - D\underset{\sim}{z}) + \Sigma_0^{-1}\mu_0\right)}_{B}\right]\right\}$$

$$\underset{\sim}{\mu} \mid \Sigma, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y} \sim N(A^{-1}B, A^{-1})$$

$$\pi(\Sigma \mid \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y}) \propto |\Sigma|^{-1/2} * |\Sigma|^{-\frac{\tau+m+1}{2}}$$

$$* \exp\left\{-\frac{1}{2}\underbrace{(\underset{\sim}{y} - (\underset{\sim}{\mu} + D\underset{\sim}{z}))'}_{\underset{\sim}{x}}\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1}(\underset{\sim}{y} - (\underset{\sim}{\mu} + D\underset{\sim}{z}))\right\}$$

$$* \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\, tr(\Lambda \Sigma^{-1})\right\}$$

$$\Sigma \mid \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y} \sim IW(\tau+1, w\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{x}' + \Lambda)$$

$$\pi(\underset{\sim}{z} \mid \Sigma, \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{y}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{z}'\underbrace{\left(D\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1}D + I\right)}_{A_0}\underset{\sim}{z}\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\underset{\sim}{z}'\underbrace{\left(D\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1}(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu})\right)}_{B_0}\right]\right\} I_{(0,+\infty)}$$

$$\underset{\sim}{z} \mid \Sigma, \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\delta}, w, v, \underset{\sim}{y} \sim TN_m(A_0^{-1}B_0, A_0^{-1})\, I_{(0,+\infty)}$$

$$\pi(w \mid \Sigma, \underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\delta}, v, \underset{\sim}{z}, \underset{\sim}{y}) \propto w^{\frac{v}{2}-1}\, w^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} w \underset{\sim}{x}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{x}\right\}$$

$$* \exp\left\{-\frac{v}{2}w\right\}$$

$$w \sim Gamma\left(\frac{v+1}{2}, \frac{1}{2}\left(v + \underset{\sim}{x}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{x}\right)\right)$$

$$\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{z} = diag(z_1, \dots, z_m)\underset{\sim}{\delta}$$

$$\pi(\underset{\sim}{\delta} \mid \Sigma, \underset{\sim}{\mu}, w, v, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{\delta}'\underbrace{\left(diag(\underset{\sim}{z})\left(\frac{\Sigma}{w}\right)^{-1} diag(\underset{\sim}{z}) + B^{-1}\right)}_{A^*}\underset{\sim}{\delta}\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\delta'\underbrace{diag(\underset{\sim}{z})\left(\frac{\Sigma^*}{w}\right)^{-1}(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu})}_{B^*}\right]\right\}$$

$$\underset{\sim}{\delta} \mid \underset{\sim}{\mu}, \Sigma, w, v, \underset{\sim}{z} \sim N_m(A^{*-1}B^*, A^{*-1})$$

$$\pi(v \mid \Sigma, \underline{\mu}, w, \underline{\delta}, \underline{z}, \underline{y}) \propto \exp\left\{-\frac{v}{2} w\right\} * \exp\{-0.2 v\} I(v>2)$$

$$v \mid \Sigma, \underline{\mu}, w, \underline{\delta}, \underline{z}, \underline{y} \sim \text{TGamma}\left\{1, \frac{v}{2} + 0.2\right\} I(v>2)$$