* حال حالتی را در نظر بگیرید که علاوه بر وابستگی درون گروهی، وابستگی پیاپی هم داریم *

(در حالتی که علاوه بر وابستگی درون گروهی، وابستگی پیاپی را هم در نظر بگیریم، با دو نوع مدل می توان داده ها را مدل کرد.

## ۱- مدل با اثرات آمیخته اتورگرسیو: (AR Mixed effect Model)

در این حالت با وابسته کردن خطا به خطاهای زمان قبل، وابستگی پیاپی را هم در نظر بگیریم.

در مدل random intercept داریم:

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \alpha_i + \epsilon_{it}$$

(وابستگی پیاپی در این حالت در واریانس اثر می گذارد)

$$\epsilon_{it} = \rho\, \epsilon_{it-1} + e_{it} \quad AR(1)$$

$$e_{it} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_e^2)$$

* هر $\epsilon_{it}$ به یک زمان قبل‌ترش وابسته است، در اصل ما در زمان $t$، زمان $t-1$ ام را مشاهده کرده ایم.

$$Var(y_{it}) = Var(\alpha_i + \epsilon_{it}) = Var(\alpha_i) + \rho^2 Var(\epsilon_{it}) =$$

$$= \sigma_\alpha^2 + \rho^2 \underbrace{var(\rho\, \epsilon_{it-1} + e_{it-1})} + \sigma_e^2$$

این را انقدر باز می کنیم تا به $\epsilon_{i0}$ برسیم، در این حالت باید برای $\epsilon_{i0}$ یک مقدار اولیه مشخص کنیم، منتهی نمی توان آن را یک عدد ثابت در نظر گرفت، چون برآوردها اریب می شود.

باید واریانس داشته باشد. پس $\epsilon_{i0} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right)$.

$$Var(\underline{y}_i) = (\sigma^2 + \sigma_\alpha^2) * \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

در این حالت هم سه پارامتر برای برآورد کردن داریم.

## 2- مدل با اثرات آمیخته انتقالی: (transition mixed effect model)

در این حالت وابستگی بیانی را با وارد کردن $y_{it-1}$ به عنوان یک متغیر توضیحی در مدل وارد می کنند.

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it} + \gamma y_{it-1} + \alpha_i + \epsilon_{it}$$

(در این حالت وابستگی بیانی روی واریانس تأثیری ندارد و فقط در امید می آید.)

$$\text{ind}\left[\begin{array}{l} \alpha_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\alpha^2) \\ \epsilon_{it} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\epsilon^2) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

$$Var(\underline{y}_i) = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_\epsilon^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\epsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_\alpha^2 + \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

در این حالت هم چون مشکلاتی چون initial condition و ... پیش می آید، $y_{i0}$ را همزمان با این مدل، (توأما) مدل می کنیم.

$$y_{i0} = \beta_{00} + \beta_{01} x_{i0} + \overset{\text{خطا}}{b_i}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ b_i \end{pmatrix} \sim N_2(\underset{\sim}{0}, \Sigma)$$

عامل وابستگی در مدل هم.

* برآورد پارامترهای مدل به روش گیبس :

در مدل با عرض از مبدأ و شیب تصادفی داریم :

$$\underline{y}_i = \beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 x_i + \alpha_i \mathbf{1} + b_i x_i + \epsilon_i$$

$$\downarrow$$

$$\underline{y}_i \sim N\Big(\beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 x_i \,,\, \underbrace{Var(\underline{y}_i)}_{\sigma^2 I_T + z_i \Psi z_i'}\Big) \qquad \underset{\sim}{\epsilon}_i \sim N(\underline{0}, \sigma^2 I_T)$$

با استفاده از روش کلاسیک و REML بدست آوردن برآوردها کمی مشکل است ، پس از فرم سلسله مراتبی و روش بیز استفاده می کنیم.

$$\underline{y}_i = [1 \;\; x_i]\underset{\sim}{\beta} + [1 \;\; x_i]\underline{\delta}_i + \underset{\sim}{\epsilon}_i$$

$$\downarrow$$

$$\underline{y}_i = \underbrace{z_i \underline{\beta} + z_i \underline{\delta}_i}_{\mu_i} + \underset{\sim}{\epsilon}_i \qquad \underline{\delta}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

فرم سلسله مراتبی

$$\begin{cases} y_i \mid \alpha_i, b_i \sim N_T\big(\overbrace{\beta_0 \mathbf{1} + \beta_1 x_i + \alpha_i + b_i x_i}^{\mu_i} \,,\, \sigma^2 I_T\big) \\ \delta_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ b_i \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi\right) \end{cases}$$

تنها یک متغیر توضیحی دارای شیب تصادفی داشتیم. و اگر بیش از یکی بود مثلاً q تا، این جا q+1 متغیر می شد.

توزیع های پیشین :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\beta} \sim N_2(\mu_0, \Phi) \\ \Psi \sim IW(\tau, \Delta) \\ \sigma^2 \sim IG(\eta, \lambda) \end{cases}$$

$$f(y_i) = \int f(y_i \mid \alpha_i, b_i)\, g(\alpha_i, b_i)\, d\alpha_i\, db_i \rightarrow$$ حاشیه‌ای اش را می توان حساب کرد

$$\pi(\beta, \sigma^2, \Sigma, \underline{\delta} \mid \underline{y}, \underline{x}) \propto L(\beta, \sigma, \underline{\delta}, \Sigma \mid y) \cdot \pi(\beta) \cdot$$

$$\cdot\, \pi(\sigma^2) \cdot \pi(\Sigma) \propto$$

→ این‌ها را semiconjugate و مستقل در نظر گرفته‌ایم.

$$\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_i)'(y_i - \mu_i) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\beta - \mu_0)' \Phi^{-1} (\beta - \mu_0) \right\} \times \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\eta+1} e^{-\lambda/\sigma^2} \, |\Sigma|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \delta_i' \Sigma^{-1} \delta_i \right\} \times |\Sigma|^{\frac{-\tau+2+1}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Lambda \Sigma^{-1}) \right\}$$

بدست آوردن Full Conditional ها

1/2 1)

$$\pi(\underline{\beta} \mid \sigma^2, \Sigma, \underline{\delta}, \underline{y}, \underline{x}) \propto \underbrace{\exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \mu_i)'(y_i - \mu_i) \right\}}_{*} \times$$

$$\times \underbrace{\exp\left\{ -\frac{1}{2} (\underline{\beta} - \mu_0)' \Phi^{-1} (\underline{\beta} - \mu_0) \right\}}_{*} \propto (\text{ادامه})$$

عبارت * را ساده می‌کنیم.

$$\exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{1}^{n} (y_i - \mu_i)'(y_i - \mu_i) \right\} = \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{1}^{n} (y_i - z_i'\delta_i - z_i'\underline{\beta})(y_i - \mu_i) \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{1}^{n} \left[ (y_i - z_i'\delta_i)'(y_i - z_i'\delta_i) - (y_i - z_i'\delta_i) z_i'\beta - \underline{\beta}' z_i (y_i - z_i'\delta_i) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta' z_i z_i' \beta \right] \right\} = \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{1}^{n} \left[ (y_i - z_i'\delta_i)'(y_i - z_i'\delta_i) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2(y_i - z_i'\delta_i) z_i' \underline{\beta} + \underline{\beta}' z_i z_i' \underline{\beta} \right] \right\}$$

همچنین عبارت (*) را ساده می‌کنیم :

$$\exp\left\{ \frac{-1}{2} (\beta-\mu_0)' \Phi^{-1} (\beta-\mu_0) \right\} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[ (\beta-\mu_0)' \Phi^{-1} \beta - (\beta-\mu_0)' \Phi^{-1} \mu_0 \right] \right\}$$

$$= \exp\left\{ \frac{-1}{2} \left[ \underline{\beta}' \Phi^{-1} \underline{\beta} - \mu_0' \Phi^{-1} \underline{\beta} - \beta' \Phi^{-1} \mu_0 + \mu_0' \Phi^{-1} \mu_0 \right] \right\}$$

حال برای ادامهٔ محاسبهٔ عبارت $\pi(\underline{\beta} \mid \sigma^2, \Sigma, \underline{\delta}, \underline{y}, \underline{x})$ ، از میان دو عبارت ساده شده بالا، تنها قسمتهایی که $\underline{\beta}$ ربط دارد را می‌نویسیم.

$$(\text{ادامه}) \quad \propto \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left( -2 (y_i - z_i' \delta_i) \underline{\beta} + \underline{\beta}' z_i z_i' \underline{\beta} \right) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-1}{2} \left[ \underline{\beta}' \Phi^{-1} \underline{\beta} - 2 \mu_0' \Phi^{-1} \underline{\beta} \right] \right\} \propto$$

$$\propto \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[ -2 \overbrace{\left( \mu_0' \Phi^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{1}^{n} (y_i - z_i' \delta_i) z_i' \right)}^{a} \underset{\sim}{\beta} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \underset{\sim}{\beta}' \underbrace{\left( \Phi^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{1}^{n} z_i z_i' \right)}_{b} \underline{\beta} \right] \right\}$$

$$a = \mu_0' \Phi^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{1}^{n} (y_i - z_i' \delta_i) z_i'$$

$$b = \Phi^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{1}^{n} z_i z_i'$$

$$\underset{\sim}{\beta} \mid \sigma^2, \Sigma, \underline{\delta}, \underline{x}, \underline{y} \sim N\left( b^{-1} a, b^{-1} \right)$$