برای انجام آزمون فرض در رویکرد بیز دو راه حل داریم:

۱- آزمون بیزی ۲- عامل بیز

آزمون بیزی

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

در این روش احتمال های پسین فرضهای صفر و مقابل را محاسبه کرده و با استفاده از آن آزمون را انجام می دهیم:

$$P_0 = P(\theta \in \Theta_0 \mid \underset{\sim}{x}) \qquad P_1 = P(\theta \in \Theta_1 \mid \underset{\sim}{x})$$

در این حالت اگر $P_0 > P_1$ باشد، فرض صفر پذیرفته می شود. در اصل می توان گفت داده ها از فرض صفر بیشتر از فرض مقابل حمایت می کنند.

نکته: زمانی که $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ شود، $P_0 + P_1 = 1$ می شود، پس کافی است که $P_0 > \frac{1}{2}$ گردد تا فرض صفر پذیرفته شود.

مثال:

$$x_1, \dots, x_n \sim Bin(1, \theta)$$

$$\theta \sim U(0,1) \overset{d}{=} Beta(1,1)$$

توزیع ناآگاهی بخش بود.

$$\begin{cases} H_0 : \theta < \frac{1}{2} \\ H_1 : \theta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای چه مقداری از $\bar{X}$ فرض صفر پذیرفته می شود؟

$$\theta \mid \underline{x} \sim Beta\Big(\underbrace{1+\sum x_i}_{\alpha'} , \underbrace{1+n-\sum x_i}_{\beta'}\Big)$$

با توجه به اینکه $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ ، فرض صفر زمانی پذیرفته می‌شود که :

$$P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x}) > \frac{1}{2}$$

$$P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x}) = P(\theta < \tfrac{1}{2} \mid \underline{x}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{B(\alpha', \beta')} \theta^{\alpha'-1} (1-\theta)^{\beta'-1} d\theta > \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{(دوجمله‌ای)}]{\text{طبق بسط}} \frac{1}{B(\alpha', \beta')} \int_0^{\frac{1}{2}} \theta^{\alpha'-1} \sum_{j=0}^{\beta'-1} \binom{\beta'-1}{j} (-\theta)^j > \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{سری جای } \Sigma \text{ و } \int \text{ عوض می‌شود}]{\text{بعلت همگرا بودن}} \frac{1}{B(\alpha', \beta')} \sum_{j=0}^{\beta'-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \binom{\beta'-1}{j} (-1)^j \theta^{j+\alpha'-1} d\theta > \frac{1}{2}$$

به کمک روشهای عددی حل می‌گردد.

Bayes Factor   عامل بیز

دومین روش انجام آزمون فرض در رویکرد بیز، استفاده از عامل بیز است. برای محاسبه عامل بیز باید بخت پسین احتمالهای فرض‌ها با احتمالهای پیشین فرض‌ها را باهم مقایسه کنیم.

(1) $$\frac{P(\theta \in \Theta_1 \mid \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_1)}$$ $$\frac{P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_0)}$$ (2)

بر این اساس عامل بیز بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B_{01} = \frac{\dfrac{P(\theta \in \Theta_0 | \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_0)}}{\dfrac{P(\theta \in \Theta_1 | \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_1)}} = \frac{P(\theta \in \Theta_0 | \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_1 | \underline{x})} \cdot \frac{P(\theta \in \Theta_1)}{P(\theta \in \Theta_0)}$$

چند نکته:

1/ هر یک از کسرهای 1 و 2 نشان دهنده میزان تغییری است که داده‌ها در احتمال‌های پیشین فرض صفر و مقابل دارند و عامل بیز میزان تغییرات احتمال‌های فرض صفر و فرض مقابل را می‌سنجد.

در صورتی که در آزمون بیزی چون تنها از احتمالات پیشین استفاده می‌کنیم، این تغییر را مشاهده نمی‌کنیم.

2/ فرضی پذیرفته می‌شود که میزان این تغییر (مقدار کسر 1 یا 2) برای آن بیشتر است. یعنی وجود داده‌ها احتمال آن فرض را افزایش می‌دهد و آن فرض پذیرفته می‌شود.

3/ با توجه به دومین نکته می‌توان گفت که زمانی که $B_{01} > 1$ باشد، فرض صفر پذیرفته می‌شود.

4/ با تعریف $B_{10} = \dfrac{P(\theta \in \Theta_1 | \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_0 | \underline{x})} \cdot \dfrac{P(\theta \in \Theta_0)}{P(\theta \in \Theta_1)}$ داریم: $B_{01} = (B_{10})^{-1}$

مثال:

$x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\longrightarrow$ known

$\mu \in N(0,1)$

$$\begin{cases} H_0: \mu < 0 \\ H_1: \mu > 0 \end{cases}$$

الف) با استفاده از محاسبه احتمال‌های پسین، نشان دهید که به ازای چه مقادیری از $\bar{x}$، فرض صفر پذیرفته می‌شود؟

ب) با استفاده از B_{01} قسمت الف را بررسی کنید.

الف) پذیرفته شدن فرض H_0 زمانی ممکن است که:

$$P_0 = P(\mu \in \Theta_0 \mid \underline{x}) > \frac{1}{2} \rightsquigarrow$$

چون $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$

$$P(\mu < 0 \mid \underline{x}) = P\left(Z < \frac{\frac{-n\bar{x}}{n+\sigma^2}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n+\sigma^2}}}\right) = \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}}\right) > \frac{1}{2}$$

می‌دانیم $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ است، پس:

$$\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}} > 0 \Rightarrow \bar{x} < 0$$

ب)

$$P(\theta \in \Theta_0) = P(\mu < 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(\theta \in \Theta_1) = P(\mu > 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x}) = P(\mu < 0 \mid \underline{x}) = \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}}\right)$$

$$P(\theta \in \Theta_1 \mid \underline{x}) = P(\mu > 0 \mid \underline{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}}\right)$$

$$B_{01} = \frac{\Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{\sigma^2/n+\sigma^2}}\right)} \cdot \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}$$

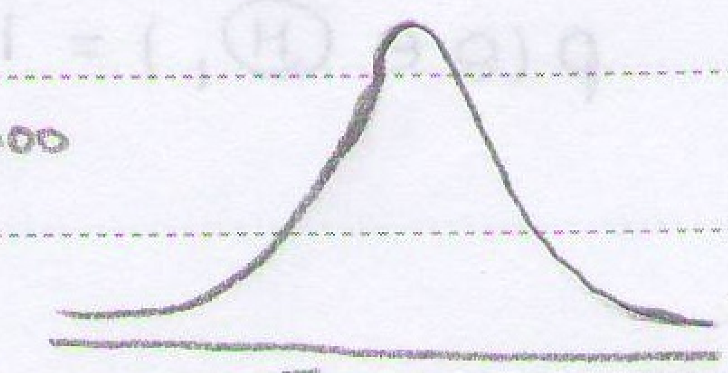
3

برای اینکه فرض H_0 پذیرفته شود، لازم است که $B_{01} > 1$ گردد، که این یعنی $\bar{x} < 0$ شود.

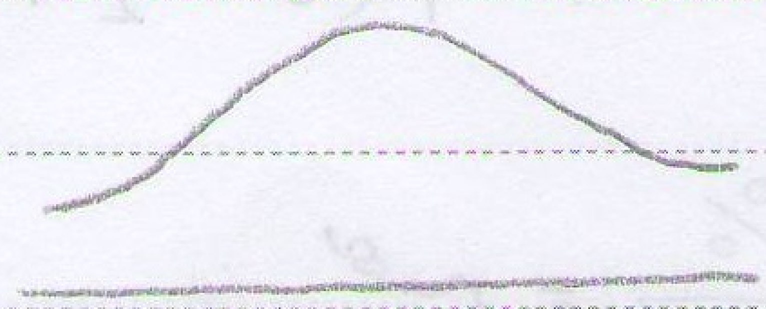
نکته: نتیجه دو روش آزمون بیزی و فاکتور بیز لزوماً مثل هم نمی‌باشند. (در مثال بالا مثل هم شد ولی نمی‌توان گفت که این حالت همیشه برقرار است.)

در نظر بگیرید فردی بدون اطلاع داشتن از سرمایه‌گذاری در بورس بپرسیم که حاضر است در بورس سرمایه‌گذاری کند و توزیع پیشین بدین صورت شود:

$$\begin{cases} H_0: \theta = 1000 \\ H_1: \theta = 100{,}000 \end{cases}$$



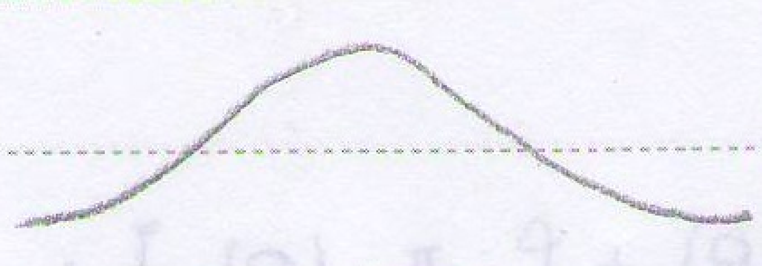
1000 تومان



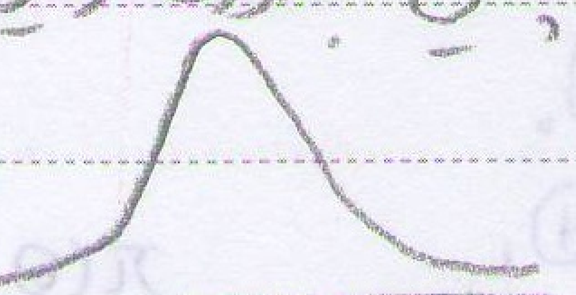
100,000 تومان

که احتمال اینکه 1000 تومان سرمایه‌گذاری کند بیشتر است.

حال فرض کنید این فرد در کلاس‌های بورس شرکت کند و نگرشش تغییر کند. حال از او درباره سرمایه‌گذاری در بورس می‌پرسد و توزیع پیشین بصورت زیر می‌شود:



1000 تومان



100,000 تومان

خب در این حالت اگر با استفاده از آزمون بیزی قضاوت کنیم داریم:

$$P_0 = P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x})$$
$$P_1 = P(\theta \in \Theta_1 \mid \underline{x})$$

$\rightarrow P_1 > P_0 \rightarrow$ فرض H_1 پذیرفته می‌شود.

و براساس فاکتور بیز:

$$B_{01} = \underbrace{\frac{P(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x})}{P(\theta \in \Theta_1 \mid \underline{x})}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{P(\theta \in \Theta_1)}{P(\theta \in \Theta_0)}}_{>1} > 1$$

$\rightarrow$ فرض H_0 پذیرفته می‌شود.

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$X \sim Bin(n,\theta)$$

$$\theta \sim Beta(1,1) \overset{d}{=} U(0,1)$$

$$\theta \mid X \sim Beta(\Sigma x_i + \alpha \;,\; n+\beta - \Sigma x_i)$$

$$\sim Beta(1+x,\; 1+n-x)$$

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \frac{1}{2} \\ H_1 : \theta \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p(\theta \in \Theta_0 \mid \underline{x}) = p(\theta = \tfrac{1}{2} \mid \underline{x}) = 0 \quad , \quad p(\theta \in \Theta_0) = 0$$

$$p(\theta \in \Theta_1 \mid \underline{x}) = p(\theta \neq \tfrac{1}{2} \mid \underline{x}) = 1 \quad , \quad p(\theta \in \Theta_1) = 1$$

$$B_{01} = \frac{0/0}{1/1} = \text{مبهم}$$

زمانی که فرضیه‌ی مورد بررسی نقطه‌ای باشد (یک نقطه یا چند نقطه) و یا استدارای توزیع پیشین پیوسته باشد، محاسبه عامل بیز امکان‌پذیر نمی‌باشد، چراکه چگالی پیوسته در یک نقطه صفر می‌شود. برای برطرف کردن این مشکل، توزیع پیشین را اصلاح می‌کنیم:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$$\pi(\theta) = \rho_0\, \pi_0(\theta)\, I_{\{\Theta_0\}}(\theta) + \rho_1\, \pi_1(\theta)\, I_{\{\Theta_1\}}(\theta)$$

$\pi_0(\theta)$ و $\pi_1(\theta)$ توزیع پیشین θ تحت فرض صفر و فرض مقابل است.

$\rho_0 + \rho_1 = 1$ است ولی چون هیچ دیدی نسبت به ρ_0 یا ρ_1 نداریم، آن‌ها را $\rho_0 = \rho_1 = \frac{1}{2}$ در نظر می‌گیریم.

انتخاب $\pi(0)$ و $\pi(1)$:

$\pi(0)$ را یک توزیع تباهیده در نظر می‌گیریم:

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta = \Theta_0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$\pi_1(\theta)$ را همان توزیع θ در نظر می‌گیریم. (چون با کم‌کردن یک یا چند نقطه از دامنه توزیع پیوسته، آن توزیع تغییر نمی‌کند.)

پس می‌توان توزیع پیشین اصلاح شده را اینگونه نوشت:

$$\pi(\theta) = \frac{1}{2} I_{\{\Theta_0\}}(\theta) + \frac{1}{2}\pi_1(\theta) I_{\{\Theta_1\}}(\theta) \quad (*)$$

فرم کلی توزیع پسین با اصلاح توزیع پیشین:

فرم کلی توزیع پیشین یعنی $(*)$ را در نظر بگیرید:

$$m(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)\,d\theta = \int_{\Theta} f(x|\theta)\left[\frac{1}{2} I_{\{\Theta_0\}}(\theta) + \frac{1}{2}\pi_1(\theta) I_{\{\Theta_1\}}(\theta)\right] d\theta$$

$$= \int_{\Theta_0} \frac{1}{2} f(x|\theta)\,d\theta + \int_{\Theta_1} \frac{1}{2} f(x|\theta)\pi_1(\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} f(x|\theta_0) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\Theta_1} f(x|\theta)\pi_1(\theta)\,d\theta}_{m_1(x)} = \frac{1}{2} f(x|\theta_0) + \frac{1}{2} m_1(x)$$

توزیع حاشیه‌ای x تحت فرض H_1

بنابراین:

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(x|\theta_0)\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} f(x|\theta_0) + \frac{1}{2} m_1(x)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{m_1(x)}{f(x|\theta_0)}} & \theta = \theta_0 \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{2} f(x|\theta)\pi_1(\theta)}{\frac{1}{2} f(x|\theta_0) + \frac{1}{2} m_1(x)} = \dfrac{f(x|\theta)\pi_1(\theta)}{f(x|\theta_0) + m_1(x)} & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$